المحاضرة الأولى

مبادئ الإحصاء والاحتمال (٢)

البيـــان | المدفوعات | المقبوضات

تعاريف

١- الحدث: هو مجموعة جزئية من مجموعة أجزاء فضاء العينة واحتماله يساوي الواحد

٢- الحدث المستحيل: هو حدث كل مجموعة جزئية من فضاء العينة وهو المجموعة الخالية ويرمز له بـ $\emptyset$ (فاي) والمجموعة الخالية هي مجموعة بدون أي عنصر أي أن

$$P(\emptyset) = 0$$

٣- الحدثان المستقلين: نقول عن الحدثين A و B أنهما مستقلان إذا كان لا تأثير لاحتمال الواحد على احتمال الآخر أي أن

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftarrow$ شرط الاستقلال

وإن لم يكونا مستقلين فنقول عنهما أنهما مرتبطين

٤- الانفصال: مجموعة خالية $\emptyset$ إذ $P(A \cap B) = \emptyset$

أي أنه لا يوجد اتصال بين الاثنين (حدثان منفصلان)

ملاحظة ١، ٢) يمكن لدينا الحدثان A, B نحسب احتمال التقاطع كما يلي:

أ- إذا كان الحدثان مستقلين فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

ب- إذا كان الحدثان مرتبطين فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \backslash A)$

$$P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A \backslash B)$$

القانون الثاني هو القانون العام لاحتمال التقاطع في حال عدم معرفتنا هل الحدثان مستقلان أم مرتبطين؟

إحصاء واحتمالات (٢)

٢- ملاحظة ②. العمليات على الأحداث:

- $A \cup B$ هو مجموعة النتائج الممكنة الموجودة في A أو B [redacted].
- $A \cap B$ هو مجموعة النتائج الممكنة الموجودة في A و B معاً.
- $\bar{A}$ هو الحدث المتمم لـ A: وهو مجموعة النتائج الموجودة في فضاء العينة وغير الموجودة في A

مثال الملاحظة ②: ليكن لدينا $P(A) = 0.4$ و $P(B) = 0.3$

احتمال A علماً أن B قد وقع يرمز له (احتمال شرطي)

$P(A \backslash B)$ أو $P_{B}(A) = 0.7$

احتمال B علماً أن A قد وقع $P(B \backslash A)$ أو $P_{A}(B) = 0.2$

المطلوب: احسب احتمال التقاطع إذا كان الحدثان مستقلان أو مرتبطان

الحل: - إذا كان الحدثان مستقلان

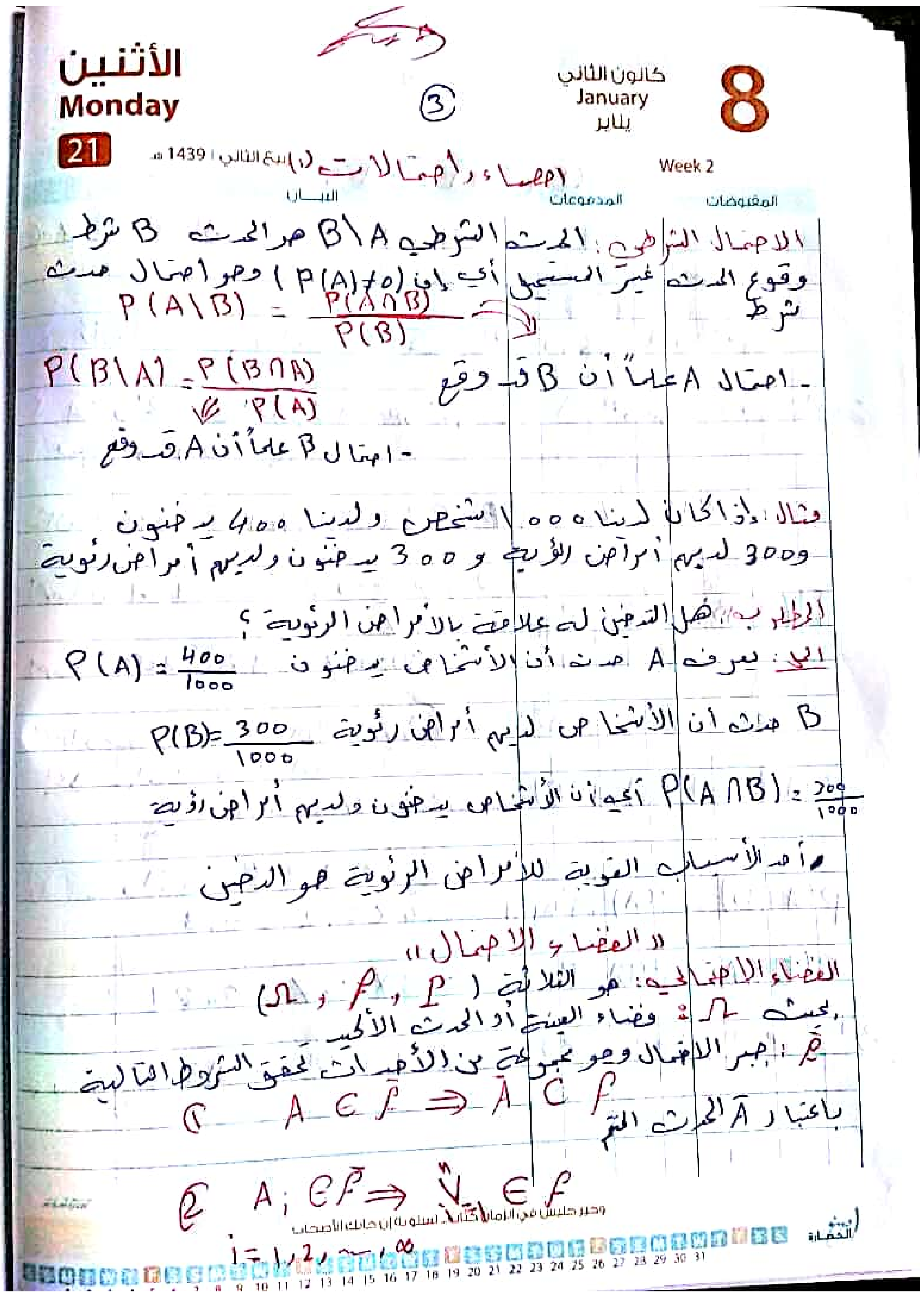
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.3 \times 0.4 = 0.12 = \frac{12}{100}$$

- إذا كان الحدثان مرتبطين

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_{A}(B) = 0.4 \times 0.2 = 0.8$$

$$P(B \cap A) = P(B) \cdot P_{B}(A) = 0.3 \times 0.7 = 0.21$$

← نستنتج من ذلك أن الاحتمال الشرطي هو الأهم إذاً ما هو الاحتمال الشرطي



③

احصاء واحتمالات (1)

البيانات | المدفوعات | المقبوضات

الاحتمال الشرطي: الحدث الشرطي B\A هو الحدث B شرط وقوع الحدث غير المستحيل أي أن $P(A)\neq 0$ وهو احتمال حدث شرط

$$P(A\backslash B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

- احتمال A علماً أن B قد وقع

$$P(B\backslash A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

- احتمال B علماً أن A قد وقع

مثال: إذا كان لدينا 1000 شخص ولدينا 400 يدخنون و300 لديهم أمراض الرئة و 300 يدخنون ولديهم أمراض رئوية

المطلوب: هل التدخين له علاقة بالأمراض الرئوية؟

الحل: يعرف A حدث أن الأشخاص يدخنون $P(A)=\frac{400}{1000}$

B حدث أن الأشخاص لديهم أمراض رئوية $P(B)=\frac{300}{1000}$

$P(A\cap B)=\frac{200}{1000}$ أي أن الأشخاص يدخنون ولديهم أمراض رئوية

• أحد الأسباب القوية للأمراض الرئوية هو التدخين

"الفضاء الاحتمالي"

الفضاء الاحتمالي: هو الثلاثي $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

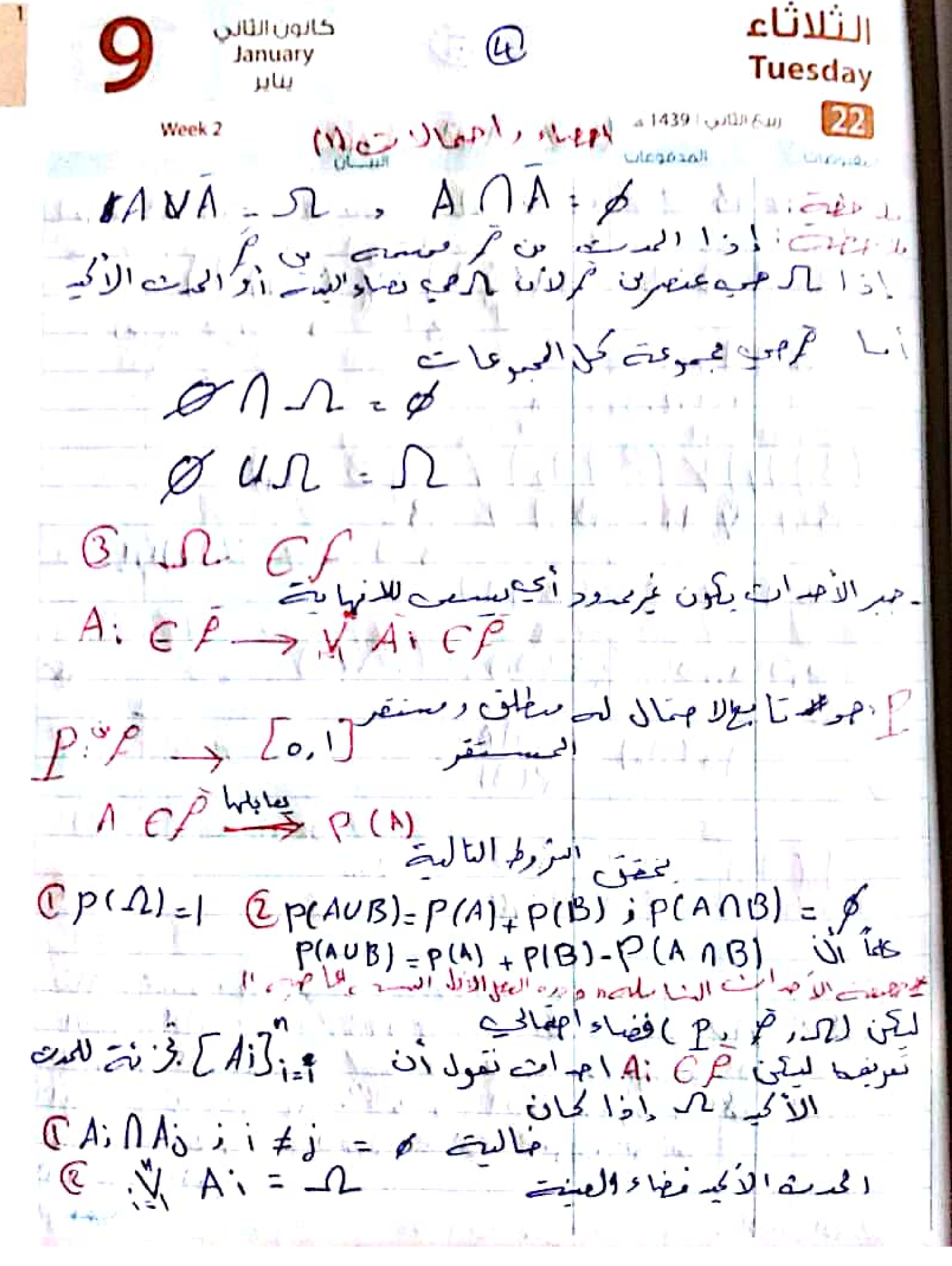
بحيث Ω: فضاء العينة أو الحدث الأكيد.

$\mathcal{F}$: جبر الاحتمال وهو مجموعة من الأحداث تحقق الشروط التالية

① $A\in\mathcal{F}\Rightarrow \bar{A}\in\mathcal{F}$ باعتبار $\bar{A}$ الحدث المتمم

② $A_i\in\mathcal{F}\Rightarrow \bigcup A_i\in\mathcal{F}$

$i=1,2,\dots,\infty$



الاحتمالات (١)

٤. لدينا: $A \cup \bar{A} = \Omega$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$

٥. مثلاً: إذا الحدث من $\mathcal{P}$ مستحيل من $\mathcal{P}$

إذا Ω مجموعة عنصرين $\mathcal{P}$ لأن Ω هي تساوي الحدث الأكيد

أما $\mathcal{P}$ هي مجموعة كل المجموعات

$\emptyset \cap \Omega = \emptyset$

$\emptyset \cup \Omega = \Omega$

③ $\Omega \in \mathcal{P}$

جبر الأحداث يكون غير محدود أي يسعى للانهاية

$A_i \in \mathcal{P} \rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{P}$

P: هو تابع الاحتمال له مطلق ومستقر المستقر

$P: \mathcal{P} \rightarrow [0,1]$

$A \in \mathcal{P} \xrightarrow{\text{يقابلها}} P(A)$

تحقق الشروط التالية

① $P(\Omega)=1$ ② $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$; $P(A \cap B) = \emptyset$

كما أن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

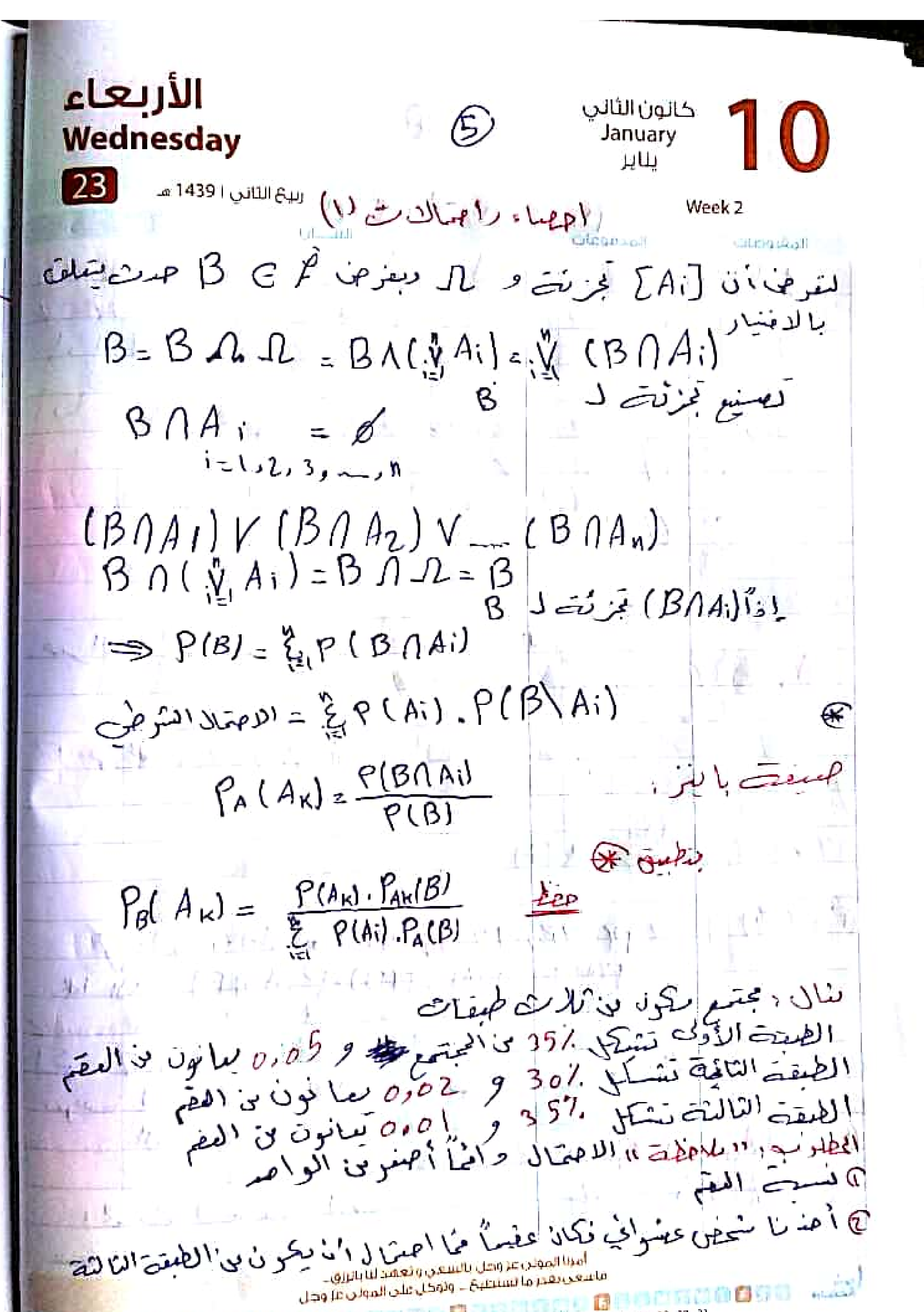
مجموعة الأحداث المتنافية ... الفصل الأول ...

ليكن $(\Omega, \mathcal{P}, P)$ فضاء احتمالي

تعريف: ليكن $A_i \in \mathcal{P}$ أحداث نقول أن $[A_i]_{i=1}^{n}$ تجزئة للحدث الأكيد Ω إذا كان

① $A_i \cap A_j \; ; \; i \neq j = \emptyset$ متنافية

② $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ الحدث الأكيد فضاء العينة



(5)

إحصاء رياضيات (١)

لنفرض أن $\{A_i\}$ تجزئة لـ Ω ولنفرض $B \in \mathcal{F}$ حدث يتعلق بالاختبار

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigvee_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigvee_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$$

تصنيع تجزئة لـ B

$$B \cap A_i = \emptyset$$
$i = 1, 2, 3, \dots, n$

$$(B \cap A_1) \vee (B \cap A_2) \vee \dots (B \cap A_n)$$
$$B \cap \left(\bigvee_{i=1}^{n} A_i\right) = B \cap \Omega = B$$

إذاً $(B \cap A_i)$ تجزئة لـ B

$$\Rightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

الاحتمال الشرطي $= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) . P(B \backslash A_i)$ ⊛

صيغة بايز:

$$P_A(A_K) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)}$$

تطبيق ⊛

$$P_B(A_K) = \frac{P(A_K) . P_{A_K}(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) . P_A(B)}$$

هام

مثال: مجتمع يتكون من ثلاث طبقات
الطبقة الأولى تشكل 35% من المجتمع و 0,05 يعانون من العقم
الطبقة الثانية تشكل 30% و 0,02 يعانون من العقم
الطبقة الثالثة تشكل 35% و 0,01 يعانون من العقم
المطلوب: "ملاحظة" الاحتمال دائماً أصغر من الواحد
① نسبة العقم
② أخذنا شخص عشوائي فكان عقيماً ما احتمال أن يكون من الطبقة الثالثة

الإحصاء والاحتمالات (1)

A_1 من الطبقة الأولى $P(A_1) = \frac{35}{100}$

A_2 من الطبقة الثانية $P(A_2) = \frac{30}{100}$

A_3 من الطبقة الثالثة $P(A_3) = \frac{35}{100}$

B حدث يدل على أن الشخص عقيماً
أخذنا شخص عشوائياً فكان عقيماً ما احتمال أن يكون من الطبقة الثالثة

$P(B \backslash A_1) = \frac{5}{100}$

$P(B \backslash A_2) = \frac{2}{100}$

$P(B \backslash A_3) = \frac{1}{100}$

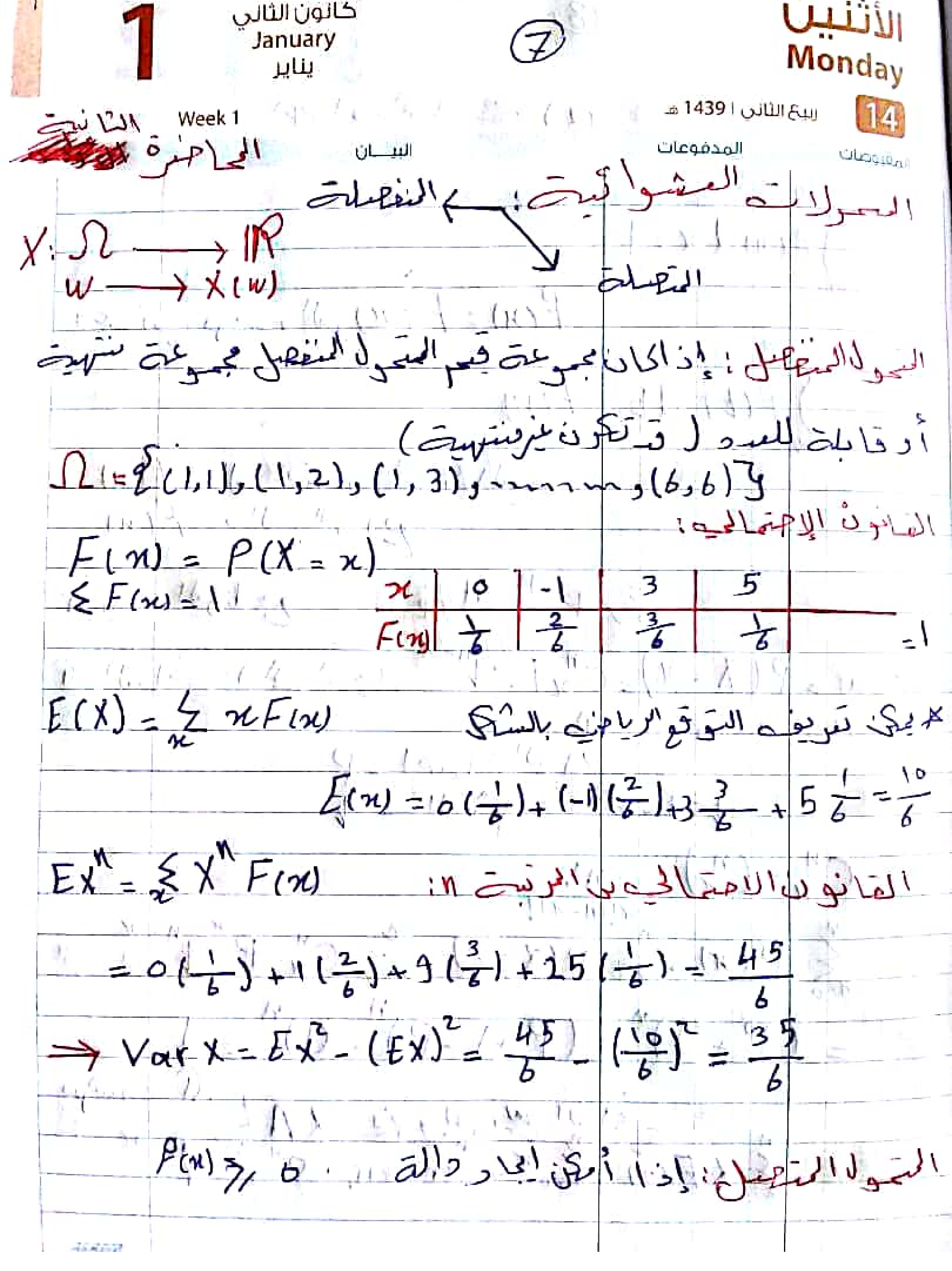
$\Leftarrow$ $P(B) = P(A_2) \cdot P(B \backslash A_2)$

$P(B) = P(A_3) \cdot P(B \backslash A_3)$

هنا نطبق نظرية بايز لأنه شرطي

$$P_B(A_3) = \frac{P(B \cap A_3)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_3) \cdot P(B \backslash A_3)}{P(B)} = \frac{\frac{35}{10000}}{\frac{175+60+35}{10000}} = \frac{35}{270} < 1$$



الثانية
المحاضرة البيان المدفوعات المقبوضات

المتحولات العشوائية: ← المنفصلة
↘ المتصلة

$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$w \longrightarrow X(w)$

المتحول المنفصل: إذا كان مجموعة قيم المتحول المنفصل مجموعة منتهية أو قابلة للعد (قد تكون غير منتهية)

$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\dots,(6,6)\}$

القانون الإحتمالي:

$F(x) = P(X = x)$

$\sum F(x) = 1$

x	0	-1	3	5
$F(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

$=1$

* يمكن تعريف التوقع الرياضي بالشكل
$E(X) = \sum_x x F(x)$

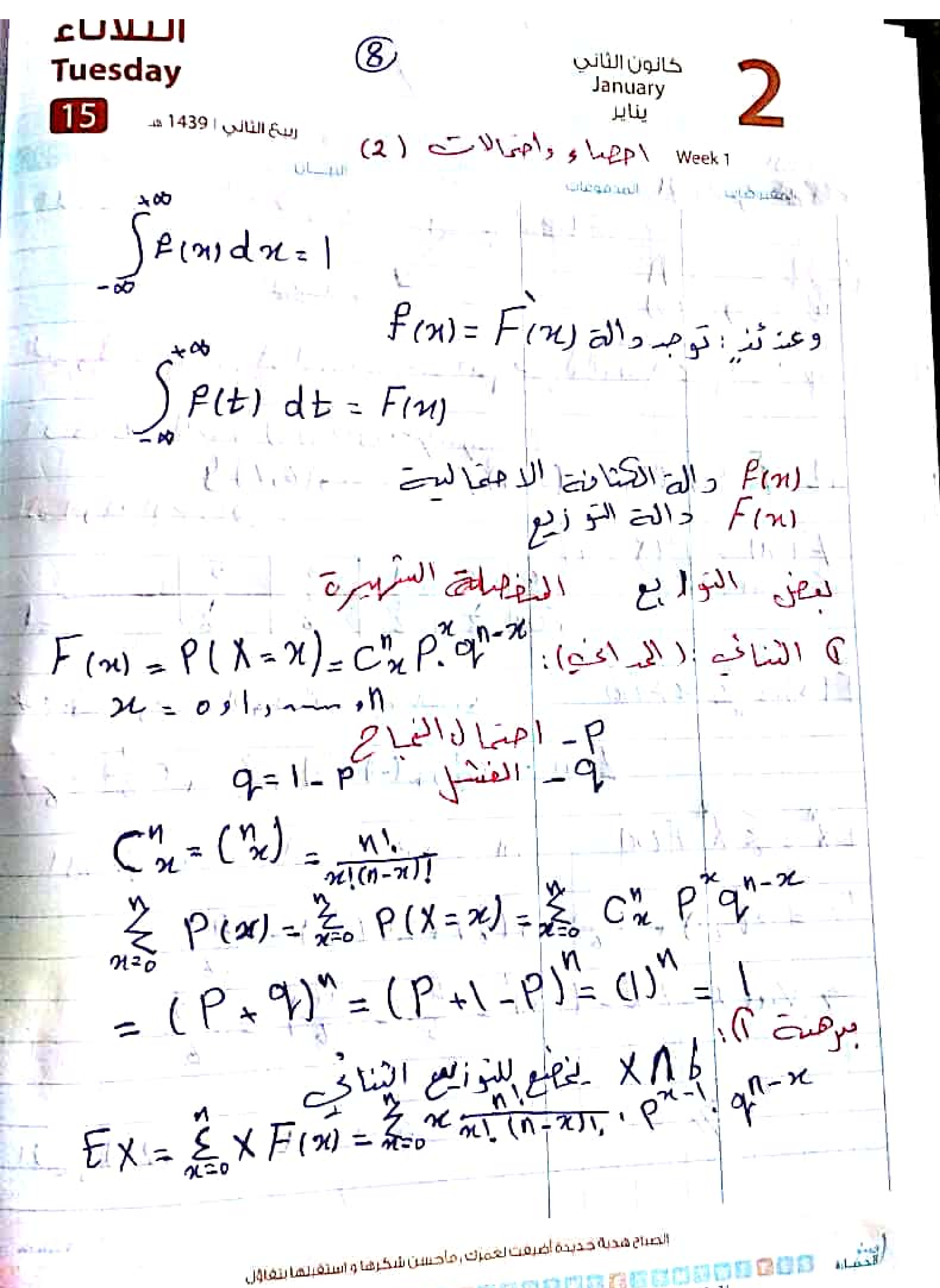
$E(x) = 0(\frac{1}{6}) + (-1)(\frac{2}{6}) + 3\frac{3}{6} + 5\frac{1}{6} = \frac{10}{6}$

القانون الاحتمالي من المرتبة n:
$EX^n = \sum_x X^n F(x)$

$= 0(\frac{1}{6}) + 1(\frac{2}{6}) + 9(\frac{3}{6}) + 25(\frac{1}{6}) = \frac{45}{6}$

$\Rightarrow \mathrm{Var}\, X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{45}{6} - (\frac{10}{6})^2 = \frac{35}{6}$

المتحول المتصل: إذا أمكن إيجاد دالة $P(x) \geq 0$



احصاء واحتمالات (2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

وعندئذ: توجد دالة $f(x) = F'(x)$

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = F(x)$$

$f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية
$F(x)$ دالة التوزيع

بعض التوازيع المنفصلة الشهيرة

① الثنائي: (الحداني):
$$F(x) = P(X=x) = C^n_x P^x q^{n-x}$$
$$x = 0, 1, \ldots, n$$

P – احتمال النجاح
q – الفشل ، $q = 1 - p$

$$C^n_x = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$$\sum_{x=0}^{n} P(x) = \sum_{x=0}^{n} P(X=x) = \sum_{x=0}^{n} C^n_x P^x q^{n-x}$$
$$= (P+q)^n = (P+1-P)^n = (1)^n = 1$$

برهنة ①: $X \cap b$ يخضع للتوزيع الثنائي

$$EX = \sum_{x=0}^{n} x F(x) = \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot p^{x-1} \cdot q^{n-x}$$

مبادئ الاحتمالات (2)

$(x-1) = y,\ n-1 = m \Rightarrow n - x = m+1 - (y+1) = m-y$

$EX \overset{*}{=} n.p \sum_{x=0}^{n} \frac{m!}{y!(m-y)!} p^{y} . q^{m-y} = nP(P+1)^{m} = n.p$

$Var X = EX^2 - (EX)^2$

$EX^2 = \sum_{x=0}^{n} x^2 \frac{n!}{x!(n-x)!} p^{x} q^{n-x}$

$= n.P \sum_{x=1}^{n} x \frac{(n-1)!}{x!(n-1)!} p^{x-1} q^{n-x}$

$\overset{*}{=} n.P \sum_{y=0}^{m} (y+1) \frac{m!}{y!(m-y)!} p^{y} . q^{m-y}$

$= n.p \left[\sum_{y=1}^{m} y . C_y^m . p^y . q^{m-y} + \sum_{y=1}^{m} C_y^m . p^y . q^{m-y} \right]$

$EX^2 = n.P[mp+1] = nP[nP - P + 1] \quad ; m = n-1$

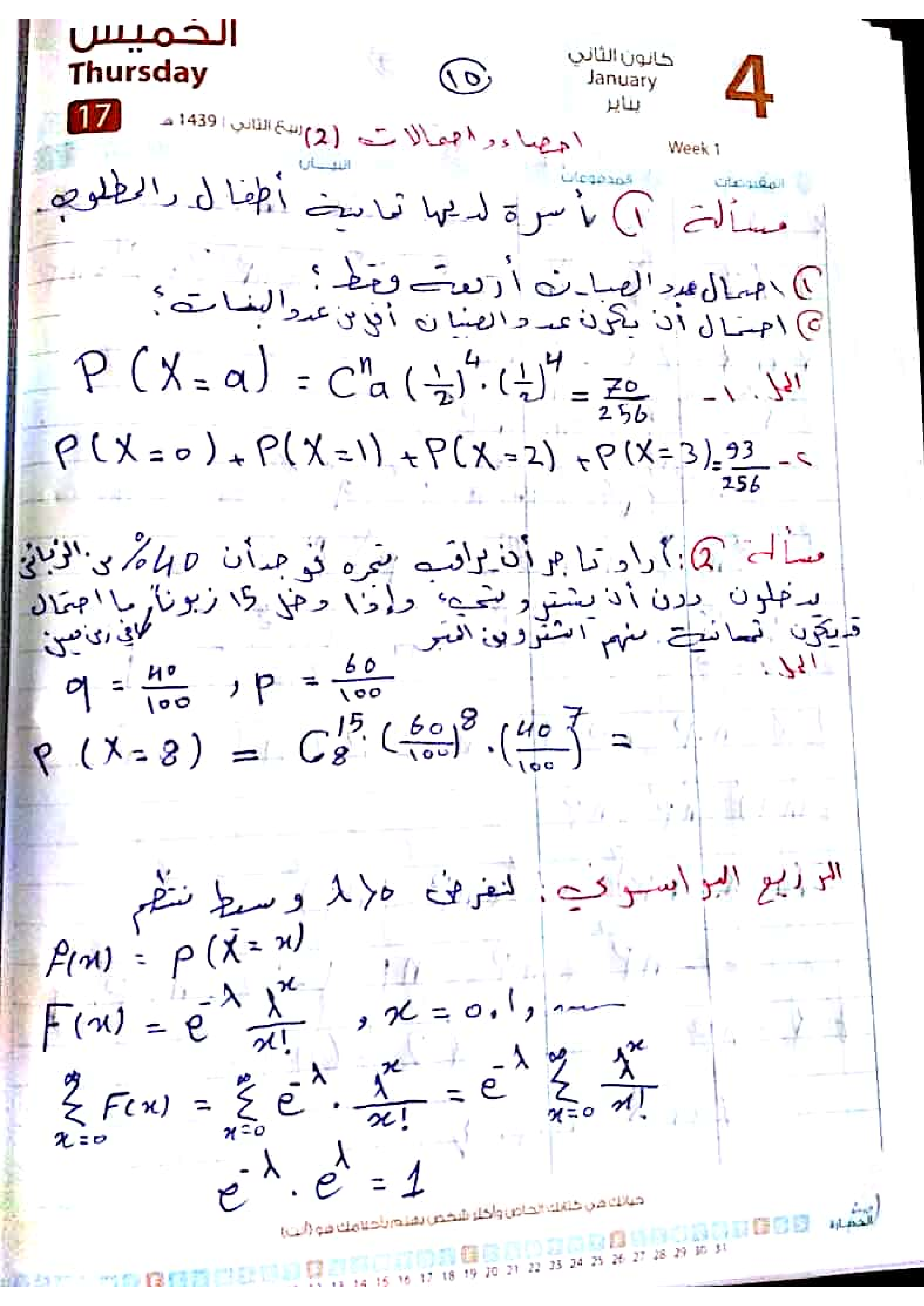
$= (n.p)^2 - np^2 + np$

$\therefore Var X = (nP)^2 - n.P^2 + nP - (nP)^2$

$= -nP^2 + nP = nP(1-P) = n.p.q$

$EX = np \Longleftarrow X \sim b(n,p)$

$Var X = n.p.q$



إحصاء واحتمالات (2)

مسألة (1): أسرة لديها ثمانية أطفال والمطلوب

(١) احتمال عدد الصبيان أربعة فقط؟
(٢) احتمال أن يكون عدد الصبيان أقل من عدد البنات؟

الحل: ١-

$$P(X=a) = C^n_a \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = \frac{70}{256}$$

٢-

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{93}{256}$$

مسألة (2): أراد تاجر أن يراقب متجره فوجد أن 40% من الزبائن يدخلون دون أن يشتروا شيء وإذا دخل 15 زبوناً ما احتمال أن يكون ثمانية منهم اشتروا من المتجر (كافي زبونين)

الحل:

$$q = \frac{40}{100}, \quad p = \frac{60}{100}$$

$$P(X=8) = C^{15}_8 \cdot \left(\frac{60}{100}\right)^8 \cdot \left(\frac{40}{100}\right)^7 =$$

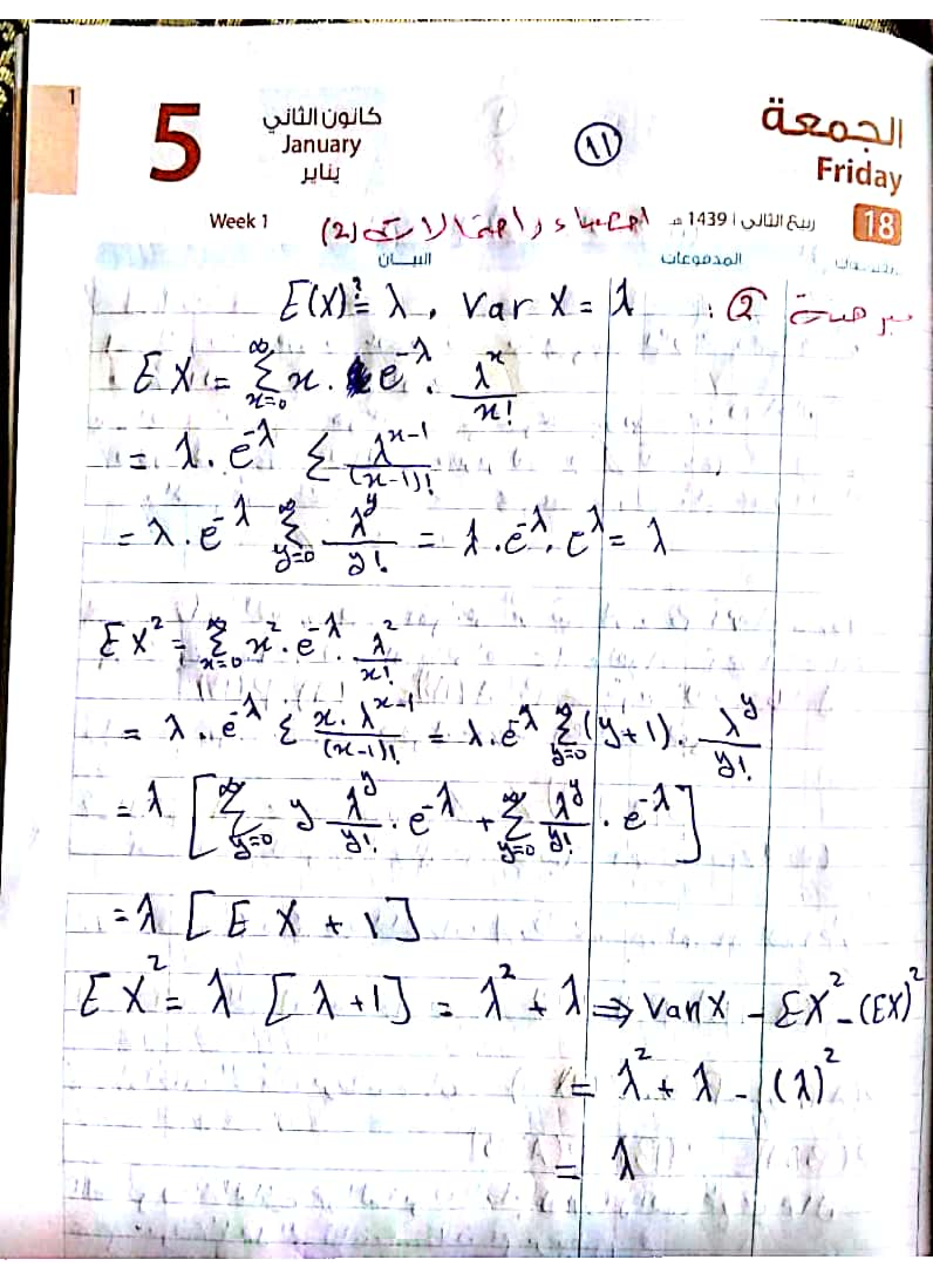
التوزيع البواسوني: لنفرض $\lambda > 0$ وسط منتظم

$$f(x) = P(X=x)$$

$$F(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} F(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$



(2) الاحصاء والاحتمالات

برهنة ②: $E(X) = \lambda$, $Var\,X = \lambda$

$$EX = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

$$EX^2 = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum \frac{x \cdot \lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} (y+1) \cdot \frac{\lambda^y}{y!}$$

$$= \lambda \left[\sum_{y=0}^{\infty} y \frac{\lambda^y}{y!} \cdot e^{-\lambda} + \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} \cdot e^{-\lambda} \right]$$

$$= \lambda \left[EX + 1 \right]$$

$$EX^2 = \lambda \left[\lambda + 1 \right] = \lambda^2 + \lambda \Rightarrow Var\,X = EX^2 - (EX)^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2$$

$$= \lambda$$

Scanned by CamScanner